L'essentiel des mathématiques financières

méthodes, exemples et exercices

Sophie Gay
Jacques Pasquier-Dorthe

Séminaire d'économie d'entreprise et de gestion financière
Faculté des Sciences Economiques et Sociales
Université de Fribourg
2000

Sommaire

Préface : les concepts clefs de la prise de décision en gestion financière.

Nous prenons tous des décisions financières, nous achetons des biens d'équipement (automobile, ordinateur, machine à laver), nous choisissons leur mode de financement (économies, paiements à tempérament, emprunts auprès de notre banque ou d'un organisme de prêt aux consommateurs, …), nous planifions aussi le futur, nous choisissons des placements : qui n'a pas un compte épargne ? Bref, la décision financière fait partie du quotidien de tout un chacun. Elle fait partie aussi du quotidien des entreprises qui elles aussi prennent des décisions d'investissement, de placement, à court terme comme à long terme, de même que des décisions de financement de ces investissements. Ces décisions sont capitales pour la survie de l'entreprise : sans investissement, la capacité productive ne peut se renouveler, et encore moins progresser, un mauvais choix de financement peut engendrer des problèmes de liquidité, voire de solvabilité. Bien d'autres exemples sont à disposition. Aussi est-il bon d'observer certains principes dans le cadre de la prise de décision financière. Le but de ce recueil est de vous permettre de maîtrise l'outil de base de la gestion financière : les mathématiques financières.

Avant de nous lancer à la découverte de cet outil, véritable clef d'accès à la finance, revenons un instant sur certaines définitions. Selon le dictionnaire Robert, la Finance est l'art ou la science traitant de monnaie ou d'argent. Si le terme d'art nous semble un peu excessif, celui de science semble parfaitement approprié sans le sens où la gestion financière regroupe un ensemble de théories et de méthodes organisées fournissant une démarche systématique d'analyse. Par cette démarche, vous serez apte à cerner tout problème financier de manière autonome. Mais qu'est-ce qu'un problème financier ? C'est un problème qui touche les moyens financier d'une organisation (une entreprise, un état ou un ménage), c'est à dire ses moyens de paiement, ses sources de *financement, et les flux qu'elle dégage. La décision financière sera alors logiquement une décision qui concerne les sources et les affectations de fonds des organisations. Elle vise une utilisation optimale des ressources financières dans le respect de l'objectif final de l'organisation considérée et selon quelques concepts clefs.*

Concept#1 : La valeur de tout actif financier est égale à la somme actualisée de tous les flux de trésorerie que cet actif va générer dans le futur.

Ce principe simple, qui exprime l'égalité entre la valeur aujourd'hui et les flux de trésorerie futurs est souvent complexe à appliquer. Considérons un actif financier qui moyennant un prix X aujourd'hui vous promet une somme de 100fr. dans un mois. S'il est clair de considérer que X est l'équivalent aujourd'hui de 100fr. dans un mois, il est beaucoup plus difficile de calculer X : comment trouver l'équivalent aujourd'hui des 100fr., que faire si l'entrée de fonds est incertaine ?

Nous verrons en détails dans les pages qui vont suivre tous les mécanismes de l'actualisation, et de manière plus générale ceux des mathématiques financières.

L'ACTUALISATION ***permet d'obtenir la valeur aujourd'hui d'un flux monétaire futur.***

Concept #2 : Le problème d'allocation de la richesse (ou choix de portefeuille) se ramène toujours à un compromis entre risque et rendement.

Le problème du choix de portefeuille est de sélectionner les titres (actifs) dans lesquels on souhaite investir. Pour effectuer cette sélection il nous faut inévitablement en aborder une question *préliminaire : quelle rémunération exigeons-nous pour supporter du risque ?*

Considérons les deux actifs suivants :

- *actif A : paye 50'000fr aujourd'hui, il vaudra avec certitude 51'500fr. demain*
- *actif B : paye 50'000fr. aujourd'hui, il vaudra demain 100'000fr. avec une probabilité de 50% et 25'000fr. avec une probabilité de 50%.*

L'actif A est sans risque (sa valeur future est certaine), et son rendement espéré, noté $E(r_A)$, est :

$$E(r_A) = r_f = \frac{Valeur\ future - valeur\ présente}{Valeur\ présente} = \frac{51'500 - 50'000}{50'000} = 3\%$$

L'actif B est risqué (sa valeur future est incertaine), et l'espérance de son rendement est :

$$E(\tilde{r}_B) = 0{,}5\left(\frac{100'000 - 50'000}{50'000}\right) + 0{,}5\left(\frac{25'000 - 50'000}{50'000}\right) = 0{,}5(1) + 0{,}5(-0{,}5) = 25\%$$

La question va être de savoir si le supplément de rendement espéré compense suffisamment pour le risque qu'implique l'actif B. Pour ce faire, nous devons déterminer des mesures pertinentes du risque supporté, mais nous devons aussi élaborer des estimateurs des préférences des agents, et en particulier de leur l'aversion envers l'incertitude. On suppose en effet que les agents vont préférer pour un même niveau de rendement espéré (E(r)), moins de risque à plus de risque, c'est-à-dire qu'ils éprouvent de l'aversion pour le risque.

En général les préférences des agents sont prises en compte par des fonctions d'utilité qui expriment leur attitude envers le risque. Par exemple, une fonction d'utilité standard en finance donne la relation suivante : $U(\tilde{r}) = E(\tilde{r}) - \frac{1}{2} a s_r^2$

Où a représente l’aversion pour le risque des agents. Plus a est élevé plus le niveau de rendement espéré doit être haut pour atteindre une même utilité U(.) (ou niveau de satisfaction). σ_r^2 représente le risque de l’actif. Il s’agit de la variance des rendements de cet actif, donc de la variabilité dans le temps par rapport à leur moyenne.

Voici donc comment sera abordée la question du choix de portefeuille : quelle compensation en termes de rendement est adéquate pour un niveau de risque donné ? Divers modèles théoriques sont susceptibles de répondre directement à cette question. Mais à la base, il faudra toujours déterminer le compromis pertinent entre risque et rendement. De manière générale, un des défis majeurs pour le gestionnaire d’entreprise et de portefeuille sera de traiter avec pertinence les problèmes de **temps** et d’**incertitude**.

L'objectif de ce recueil est de traiter du premier concept énoncé. En fait, c'est de permettre à tout un chacun de maîtriser les outils de base des mathématiques financières pour répondre aux besoins premiers de l'investisseur : estimer les remboursements d'emprunts, le taux d'intérêt effectivement versé sur un leasing, évaluer rapidement une obligation, … On traitera donc avant tout de la "mécanique" requise pour appliquer la théorie financière.

Aucune connaissance préalable n'est requise cependant sur le plan mathématique : l'ouvrage est accessible à tous. Il est organisé de sorte que chaque élément nouveau est suivi d'un exercice d'application, c'est pourquoi nous recommandons de le lire en respectant la séquence des chapitres.

Les formules de base les plus importantes seront surlignées en gris, de même que les éléments majeurs à retenir.

0. Introduction

Votre ami de toujours vous demande de le dépanner temporairement en lui prêtant 500fr. Il vous donne ensuite le choix d'être remboursé dans une semaine ou dans un mois. Bien évidemment vous allez préférer récupérer votre argent le plus tôt possible (même si vous ne doutez pas de la bonne foi de votre ami). Voici clairement illustré le fait que nous avons tous une préférence pour le présent en ce qui concerne l'argent et qu'un franc demain n'a pas la même valeur qu'un franc aujourd'hui. Par ailleurs, vous serez d'autant plus pressé de récupérer votre mise que vous avez des doutes sur la volonté, ou les capacités à rembourser du demandeur. A la préférence pour le présent s'ajoute donc une certaine aversion pour le risque qui pourra prendre bien des formes comme nous le verrons plus tard.

Sur la base de ces deux facteurs, comment estimer la valeur future d'une somme X aujourd'hui, ou encore la valeur aujourd'hui d'un montant à recevoir dans trois mois ? Les mathématiques financières vont nous permettre ces opérations. Dans la première section de ce recueil vont être exposés tous les outils mathématiques requis pour appliquer le principe d'évaluation présenté dans notre introduction : la valeur de tout actif correspond à la somme en valeur présente de tous les flux financiers qu'il génère. Mais commençons par quelques définitions.

1. La notion d'intérêt.

L'intérêt est le prix à payer pour utiliser des fonds empruntés. C'est le ***loyer*** *de l'argent : le prix payé pour bénéficier d'une somme donnée durant une période donnée, cette somme étant remboursée au prêteur en fin de période.*

En tant que prix, l'intérêt est soumis dans sa formation aux lois de l'offre et de la demande : plus il y a demande de fonds, plus l'intérêt est élevé, et inversement si l'offre de fonds est plus grande, l'intérêt est plus faible. Plus précisément, à tout moment prévaut une multiplicité de taux d'intérêts, variant en fonction de l'horizon de temps considéré, des qualités de l'emprunteur, des caractéristiques du prêteur, ... Mais nous n'entrerons pas dans ces détails, car nous voulons mettre en valeur avant tout dans ce recueil les mécanismes de calcul.

1.1 *Intérêt simple.*

Déf. *L'intérêt est dit « simple » lorsqu'il est calculé à chaque période seulement sur la base de la somme prêtée ou empruntée à l'origine (par la suite, nous appellerons cette somme le capital).*

Par L'INTERET SIMPLE, ***le capital, base de calcul, reste constant, de même que le montant d'intérêt de chaque période.***

MODE DE CALCUL :

Soit V_I	*: le capital initial (somme prêtée ou empruntée),*
V_F	*: le capital final*
r	*: taux d'intérêt simple pour une période*
n	*: nombre de périodes (horizon)*
I_t	*: montant d'intérêt accumulé sur t périodes*
i_t	*: montant d'intérêt pour la période t.*

D'après nos définitions, on a :

$$I_1 = V_I \times r$$

$$I_n = \underbrace{(V_I \times r)}_{1} + \underbrace{(V_I \times r)}_{2} + \ldots + \underbrace{(V_I \times r)}_{n} = n[V_I \times r]$$

périodes 1 2 n

$$V_F = V_I + I_n = V_I + n\left[V_I \times r\right] = V_I\left(1 + nr\right)$$

Formules récapitulatives :

$$\boxed{\begin{array}{l} I_n = V_I \times n \times r \\ V_F = V_I\left(1 + nr\right) \end{array}}$$

Exemple :

Le premier août 1291, votre aïeul a placé une somme équivalente à 500 fr. au taux d'intérêt simple de 8%, calculez combien votre famille a accumulé d'intérêt au 1er août 1999, et quelle est à cette date la valeur totale (capital plus intérêts) de votre placement.

Solution :

$I_1 = 500 \times 0{,}08 = 40$ *intérêt perçu chaque année.*

$I_{706} = 500 \times 0{,}08 \times 708 = 28320$ *intérêts accumulés depuis 1291.*

$V_F = 500\left(1 + 708 \times 0{,}08\right) = 500 \times 57{,}48 = 28820$ *valeur totale du placement le 1er août 1999.*

1.2 *Intérêt composé :*

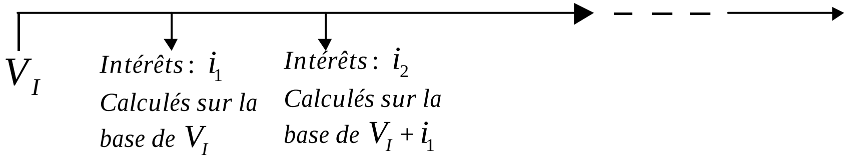
Déf.

Le taux d'intérêt est dit composé lorsqu'à la fin de chaque période l'intérêt est s'ajoute au capital de début de période pour former la base de calcul de l'intérêt pour la période suivante.

Donc :
- *le capital de base varie à chaque période.*
- *le montant d'intérêt varie à chaque période.*
- *s'il s'agit d'un placement l'intérêt s'ajoute au capital, s'il s'agit d'un emprunt, l'intérêt est retranché du capital.*

Par *L'INTERET COMPOSE* ***le montant d'intérêt et le capital changent à chaque période.***

MODE DE CALCUL :



Ainsi, on peut calculer le montant périodique d'intérêt de la manière suivante :

$$i_1 = V_I \times r$$
$$i_2 = (V_I + i_1)r = (V_I + V_I \times r) \times r = V_I(1+r)r$$
$$i_3 = (V_I + i_1 + i_2)r = (V_I + V_I \times r + V_I(1+r)r)r = V_I(1+r)^2 r$$

et par récurrence on aboutit à : $\boxed{i_n = V_I(1+r)^{n-1} r}$

De même, on calcule le capital accumulé comme suit :

$$V_1 = V_I + i_1 = V_I + V_I \times r = V_I(1+r)$$
$$V_2 = V_I(1+r) + V_I(1+r)r = V_I(1+r)^2$$
$$V_3 = V_I(1+r)^2 + V_I(1+r)^2 r = V_I(1+r)^3$$

ou de manière générale : $\boxed{V_n = V_I(1+r)^n}$ *lorsque le capital est placé en début d'année.*

<u>Exemple</u> :

Alors même que votre aïeul effectuait son placement en 1291, son épouse décidait de suivre son exemple. Cependant elle préféra placer à un taux de 8% annuel composé.

Solution:

$I_1 = i_1 = 500 \times 0{,}08 = 40$ *intérêt perçu la première année.*

$V_F = 500(1 + 0{,}08)^{706} = 500 \times 3{,}96\ 10^{23} = 1{,}98\ 10^{26}$ *valeur totale du placement le 1er août 1997.*

$I_{706} = 1{,}98\ 10^{26} - 500 = 1{,}98\ 10^{26}$ *intérêts accumulés depuis 1291.*

EXERCICES -- SECTION 1

1.Vous placez la somme de 10'000.-fr au taux d'intérêt simple annuel de 4% durant 10 ans. Quel montant annuel d'intérêt allez-vous recevoir? Quel montant total d'intérêt allez-vous recevoir sur les 10 années?

2. Vous souhaitez placer une somme X aujourd'hui afin de disposer de 23'500.-fr dans 15 ans. Sachant que vous ne pouvez obtenir qu'une rémunération de votre placement au taux d'intérêt simple annuel de 5%, quelle somme devez-vous placer aujourd'hui pour atteindre votre objectif?

3. Vous placez la somme de 10'000.-fr au taux d'intérêt composé annuel de 4% durant 10 ans. Quel montant annuel d'intérêt allez-vous recevoir? Quel montant total d'intérêt allez-vous recevoir sur les 10 années?

4. Vous souhaitez placer une somme X aujourd'hui afin de disposer de 23'500.-fr dans 15 ans. Sachant que vous ne pouvez obtenir qu'une rémunération de votre placement au taux d'intérêt composé annuel de 5%, quelle somme devez-vous placer aujourd'hui pour atteindre votre objectif?

Solutions :

1.
2.
3.
4.

2. Notion de capitalisation.

Déf. *La capitalisation indique la fréquence avec laquelle l'intérêt s'ajoute au capital en cas d'intérêts composés.*

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, l'intérêt composé s'ajoute au capital en fin de période : il est capitalisé. Jusqu'à présent la période considérée était l'année, mais la fréquence de capitalisation peut être plus élevée, et l'intérêt peut venir s'ajouter au capital chaque semestre, trimestre, mois, ou même jour. Selon que l'intérêt est capitalisé chaque trimestre, mois ou année, on parlera de capitalisation trimestrielle, mensuelle ou annuelle.

Etant donné le principe de l'intérêt composé, plus le nombre de capitalisations par année est grand, plus la valeur accumulée à l'échéance (fin du placement) sera élevée pour un taux d'intérêt donné.

2.1 Les types de taux :

Pour effectuer des calculs pertinents il est donc nécessaire de connaître le nombre de capitalisations par année, mais aussi le ***type de taux d'intérêt ou de rendement*** *qui est fourni. En effet on peut distinguer :*

- *le taux périodique (noté r_p)*

c'est le taux correspondant à la période de capitalisation, il représente le rendement en intérêt sur cette période. Supposons une capitalisation mensuelle, au début du mois vous avez placé 1'000 fr., et à la fin du mois votre placement est de 1'006 fr.. Vous avez donc reçu 6.-fr. d'intérêt.

Votre taux de rendement périodique est alors :

$$\frac{1'006-1'000}{1'000}=0{,}006=0{,}6\%$$

■ *le taux nominal annuel (noté r_i)*

correspond au taux périodique multiplié par le nombre de capitalisations par année. En poursuivant l'exemple précédent, on aurait un taux nominal de 0,6x12 = 7,2% par année. Le taux périodique peut donc aussi se définir par rapport au taux nominal : c'est le taux nominal divisé par le nombre de capitalisations par année.

■ *le taux effectif annuel (noté r):*

c'est le taux annuel équivalent au taux périodique. C'est le taux annuel qui procure la même valeur accumulée en fin d'année qu'un placement au taux périodique. Supposons que vous puissiez placer 1.- fr. au taux périodique mensuel de 0,6%, quel serait le taux annuel effectif ? Pour qu'il y ait équivalence, il est nécessaire que l'égalité suivante soit vérifiée :

$$1\left(1+r_p\right)^{12}=1(1+r)$$

en effet, si les taux sont équivalents (vous êtes indifférent entre placer 12 mois au taux mensuel r_p ou 1 an au taux annuel r), placer une unité au taux périodique mensuel r_p doit fournir la même valeur finale que placer une unité au taux effectif annuel r.

Le taux de rendement effectif se définit aussi comme le taux de rendement effectivement réalisé, c'est-à-dire qu'il correspond à la rentabilité réelle mesurée par : $r=\frac{V_F-V_I}{V_I}$.

ATTENTION :

Ne pas confondre taux effectif, qui correspond à la rentabilité effectivement réalisée, et taux réel, qui correspond au taux d'intérêt en termes réels, ce qui exclut les effets de l'inflation.

2.2 Le principe d'équivalence des taux :

Evidemment, il est extrêmement utile de manipuler avec aisance ces taux afin notamment de comparer les caractéristiques de divers placements ou emprunts. Nous souhaitons avant tout connaître les taux périodiques et effectifs, alors que souvent la pratique affiche des taux nominaux qui ne reflètent pas exactement la réalité. Comme passer donc des uns aux autres ?

→ *calcul du taux effectif à partir du taux nominal :*

On vous donne un taux nominal annuel r_i *et vous savez que l'intérêt est capitalisé k fois par année.*

Taux périodique : $r_p = \dfrac{r_i}{k}$

A partir de là on applique le principe d'équivalence des taux :

$1(1+r_p)^k$	$=$	$1(1+r)$
1 unité placée durant k périodes au taux r_p		*1 unité placée durant 1 année au taux r*

soit $\boxed{(1+r_p)^k - 1 = r}$

Bien évidemment, vous devez ***toujours transformer les taux nominaux*** *en taux effectifs ou périodiques pour effectuer des calculs. En effet, le taux nominal n'est qu'une construction, une habitude de présentation, il ne permet pas d'évaluer les flux d'intérêts.*

<u>Exemples</u> :

Vous placez 2'500 fr. à la banque YX qui affiche un taux nominal de 5% annuel capitalisé par trimestre. Quel est votre capital accumulé au bout de 4 années ?

On doit d'abord obtenir le taux périodique :

$$r_p = \frac{r_i}{k} = \frac{0{,}05}{4} = 0{,}0125$$

Le placement a une échéance de 4 ans, soit 4x4=16 trimestres, donc d'après l'expression de la valeur finale d'un placement :

$$V_F = V_4 = 2'500\,(1{,}0125)^{16} = 3'049{,}72\,fr.$$

On pourrait aussi calculer d'abord le taux effectif annuel : $r = (1{,}0125)^4 - 1 =$ 5,095%, *puis la valeur finale :*

$$V_F = V_4 = 2'500\,(1{,}05095)^4 = 3'049{,}72\,fr.$$

Et l'on obtient bien le même résultat car 5,095% est le taux effectif annuel équivalent au taux périodique de 1,25% par trimestre.

Par ailleurs, on peut calculer : $\dfrac{V_F - V_I}{V_I} = \dfrac{3'049{,}72 - 2'500}{2'500} = 0{,}2199$, *c'est à dire un taux de rendement de 21,99% sur 4 années. Pour connaître le taux effectif annuel :* $\sqrt[4]{(1{,}2199)} - 1 = 0{,}05095$, *ce qui correspond bien à notre résultat précédent.*

⟶ *<u>Calcul d'un taux périodique de périodicité différente à partir d'un taux nominal</u>.*

D'après nos exemples précédents, il est clair que seuls des taux effectifs et de même périodicité peuvent être comparés.

Soit un taux nominal capitalisé k fois par année ($r_{i,1}$). Vous souhaitez savoir quel taux nominal capitalisé h fois par année ($r_{i,2}$) lui est équivalent. Le principe d'équivalence implique qu'un placement de même échéance procure la même valeur finale. Ainsi on aura :

$1\left(1+\frac{r_{i,1}}{k}\right)^{k} = 1\left(1+\frac{r_{i,2}}{h}\right)^{h}$*, ce qui exprime l'égalité des valeurs finales après un an. Le taux recherché est* $r_{i,2}$*, il suffit de l'exprimer en fonction de* $r_{i,1}$.

$$1+\frac{r_{i,2}}{h} = \sqrt[h]{\left(1+\frac{r_{i,1}}{k}\right)^{k}} = \left(1+\frac{r_{i,1}}{k}\right)^{k/h} \quad \text{, soit } \frac{r_{i,2}}{h} = r_p = \left(1+\frac{r_{i,1}}{k}\right)^{k/h} - 1$$

<u>Exemples</u> :

- *Calculez le taux périodique mensuel équivalent à un taux nominal annuel capitalisé par semestre de 9%.*
- *Quel est le taux effectif pour une période de 3 ans équivalent à un taux nominal de 7,5% capitalisé par trimestre ?*

<u>Solutions</u> :

$$r_p = \left(1+\frac{0,09}{2}\right)^{2/12} - 1 = \left(1+\frac{0,09}{2}\right)^{1/6} - 1 = 0,0074$$

$$r = \left(1+\frac{0,075}{4}\right)^{4/(1/3)} - 1 = \left(1+\frac{0,075}{4}\right)^{4\times 3} - 1 = 0,2497$$

Pour simplifier, on peut garder en mémoire que

Les taux nominaux ne peuvent être élevés à la puissance, les taux périodiques ou effectifs ne peuvent être divisés.

2.3 La capitalisation continue :

Jusqu'à présent nous avons parlé de k capitalisations par période en référant au mois ou au trimestre. Mais les périodes de capitalisation peuvent devenir tellement nombreuses qu'on peut considérer qu'elles tendent vers l'infini, on parle alors de ***capitalisation en continu****, ou de* ***capitalisation continue*** *: l'intérêt s'ajoute continuellement au capital.*

Nous connaissons bien maintenant la formule : $1+r=\left(1+\frac{r_i}{k}\right)^k$, *lorsque k tend vers l'infini, il nous faut estimer :*

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{r_i}{k}\right)^k-1=e^i\cdot$$

Aussi, la valeur finale d'un placement de 1 fr. durant n années au taux nominal de r_i *capitalisé en continu est de :*

$$\boxed{V_F=V_i\, e^{r_i\times n}}$$

et le taux effectif annuel s'exprime comme

$$\boxed{r=e^{r_i\times n}-1}$$

<u>Exemple</u> :

Vous avez le choix entre placer à 8% effectif annuel, ou encore à 7,4% nominal annuel capitalisé en continu, que choisissez-vous ?

<u>Solution</u> :

$r=e^{0{,}074}-1=0{,}0768$ *je choisis donc le taux de 8% annuel effectif.*

EXERCICES -- SECTION 2

1. *Quel est le taux effectif équivalent au taux de 5,5% nominal annuel capitalisé par année? Même question si la capitalisation est semestrielle, si la capitalisation est trimestrielle, si la capitalisation est mensuelle.*

2. *Quel est le taux nominal annuel équivalent à un taux effectif de 4%?*

3. *Quel est le taux périodique trimestriel équivalent à un taux effectif annuel de 4,7%?*

4. *Quel est le taux périodique mensuel équivalent à un taux nominal annuel capitalisé par mois de 8,5%?*

5. *Quel est le taux périodique trimestriel équivalent à un taux nominal annuel capitalisé par semestre de 5%?*

6. *Quel est le taux nominal annuel capitalisé par semestre équivalent au taux nominal annuel capitalisé par trimestre de 6,2%?*

7. *Quel est le taux nominal annuel capitalisé par mois équivalent au taux nominal annuel capitalisé par trimestre de 6,5%?*

8. *Quel est le taux effectif équivalent au taux nominal annuel de 6% capitalisé en continu ?*

9. *Quel est le taux nominal capitalisé en continu équivalent au taux nominal annuel capitalisé par trimestre de 6%?*

10. *Quel est le taux périodique trimestriel équivalent au taux nominal annuel de 9% capitalisé par mois?*

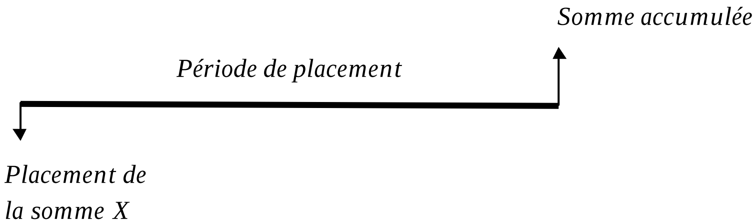
<u>Solutions</u> :

1. *5,5% ; 5,5756% ; 5,6145% ; 5,64079%*
2. *4%*
3. *1,01155%*
4. *0,70833%*
5. *1,24228%*
6. *6,24805%*
7. *6,465106%*
8. *6,18365%*
9. *5,95545%*
10. *2,26692%*

3. Valeur présente et valeur future

3.1 Eléments de base : versements uniques

Comme nous l'avons déjà vu, la valeur finale correspond à la valeur accumulée d'un placement à un taux d'intérêt donné durant une période de temps donnée.



D'après les concepts précédemment présentés, une somme de 1'000.- fr. placée pendant 4 ans au taux de 5% effectif annuel aura une valeur future de :

$$V_F = 1'000\,(1{,}05)^4 = 1'215{,}51\,fr.$$

De même, supposons que vous gagniez 450'000.- fr. à la loterie. On vous donne le choix entre obtenir cette somme immédiatement ou dans un an. Sachant que vous estimez qu'une rémunération juste d'un placement de cette taille auprès d'une institution offrant peu de risque de défaut est de 4% annuel effectif, on peut dire que vous serez indifférent entre recevoir 450'000.- fr. aujourd'hui ou $450'000(1{,}04) = 468'000\,fr$ *dans un an.*

Inversement on peut dire que 450'000.- fr. représente la valeur présente de 468'000.-fr. dans un an. Ainsi :

$$450'000 = \frac{486'000}{1{,}04}$$

De manière plus générale on peut définir :

$$\boxed{V_p = \frac{V_F}{(1+r)^n}}$$

NB *:*
Dans le cas particulier de l'intérêt simple, nous aurions

$$V_p = \frac{V_F}{(1+n \times r)}$$

<u>Exemple</u> :
Sachant que vous pouvez obtenir une rémunération de 4% effectif annuel sur vos placements préféreriez-vous recevoir 5'000fr. aujourd'hui ou 5'800fr. dans trois ans ?

<u>Solution</u> :
Pour en juger il faut ramener ces deux montants à la même date, car nous avons clairement vu qu'un franc aujourd'hui n'est pas égal à un franc demain.

Valeur actuelle des 5'800.-fr. : $\frac{5'800}{(1{,}04)^3} = 5'156{,}18\ fr.$

Valeur future des 5'000.-fr. : $5'000(1{,}04)^3 = 5'624{,}32\ fr.$

Vous allez donc préférer recevoir 5'800.-fr. dans trois ans car ce montant est supérieur à la valeur future de 5'624.32fr, ou de manière équivalente la valeur présente de 5'800.-fr. (5'158.18) est supérieure à 5'000.-fr.

3.2 Valeurs présentes et futures de périodicités.

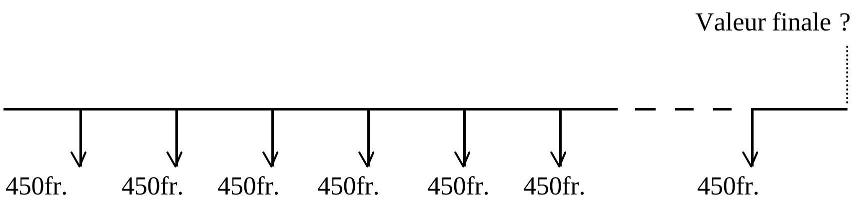
Jusqu'à présent nous avons traité de versements uniques (un placement, l'emprunt d'une somme donnée à un moment donné). Mais dans la réalité de nombreux instruments financiers sont caractérisés par des versements successifs :

- *titres à revenu fixe : les obligations versent régulièrement ce que l'on appelle un « coupon », qui représente la rémunération en intérêts du capital investi.*
- *les actions procurent en général à leur détenteur un dividende, qui n'est ni obligatoire ni fixe dans le temps*[1]*, bien que caractérisé par une grande régularité.*

De plus, nos dépenses de la vie courante impliquent bien souvent des suites de versements : les paiements de loyer, les remboursements d'hypothèque, d'emprunts, ...

Nous allons donc nous intéresser de plus près aux versements successifs, à leur valeur future, et à leur valeur présente.

Supposons que vous réserviez chaque mois un montant de 450.-fr. pour le déposer dans un compte d'épargne rémunéré au taux nominal de 3,25% capitalisé par semestre :



La suite de versements de 450.-fr. constitue une ***suite de versements fixes de fin de période****, car le premier versement a lieu en fin du premier mois de perception du salaire. Les*

---

[1] Pour les actions ordinaires; en revanche pour les actions privilégiées les montants sont fixés.

versements de fin de période sont les plus fréquents, mais ceux de débuts de période se rencontrent aussi, on peut notamment citer : les paiements de loyer, de prime d'assurance, ... Les suites de versements de fin de période sont aussi parfois appelées tardives, et celles de début de période sont appelées précoces.

Avant d'aller plus loin dans nos développements, rappelons quelques éléments arithmétiques qui vont nous être fort utiles par la suite.

Rappel

Soit la somme S des n premiers termes d'une suite géométrique :

$$S = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1}$$

$$S = a\,S' = a\left[\frac{1-q^n}{1-q}\right]$$

Une suite géométrique est caractérisée par le fait que chaque terme de la suite est égal au terme précédent multiplié par une constante : la raison.

La somme des n premiers termes d'une suite géométrique est égale au premier terme (a) multiplié par un moins la raison (q) à la puissance du nombre de termes dans la suite (n) et divisé par un moins la raison (q).

$$\boxed{S = a\left[\frac{1-q^n}{1-q}\right]}$$

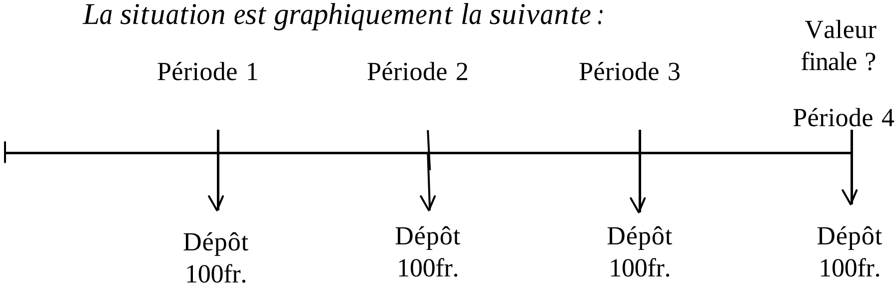
Ce résultat nous est fort utile car les valeurs présentes ou futures de séries de versements sont des suites géométriques comme nous allons le voir maintenant.

3.2.1 Versements de fin de période (ou tardifs).

a- Valeur future de suites de versements de fin de période.

Vous déposez 100.-fr. chaque fin de mois pendant 4 mois, combien avez-vous accumulé sachant que votre placement est rémunéré au taux périodique mensuel de 0,3%.

La situation est graphiquement la suivante :



$$V_F = 100(1{,}003)^3 + 100(1{,}003)^2 + 100(1{,}003) + 100$$
$$V_F = 100\left[1 + (1{,}003) + (1{,}003)^2 + (1{,}003)^3\right],$$

où l'on retrouve l'expression de la somme des 4 premiers termes d'une suite géométrique de raison (1,003). Il nous est donc possible d'utiliser la formule précédente :

$$V_F = a\left[\frac{1-q^n}{1-q}\right] = 100\left[\frac{1-(1{,}003)^4}{1-(1{,}003)}\right] = 100\left[\frac{1-(1{,}003)^4}{-0{,}003}\right] = 100\left[\frac{(1{,}003)^4-1}{0{,}003}\right] = 401{,}80\,fr$$

De manière générale, on pourra écrire que la valeur finale d'une suite de versements périodiques tardifs X est égale à :

$$\boxed{V_F = X\left[\frac{(1+r)^n - 1}{r}\right]}$$

NB :

■ *Nous étions ici en présence de versements mensuels, et nous avons logiquement utilisé un taux périodique mensuel : la fréquence du taux employé doit toujours correspondre à la fréquence de la périodicité.*

■ *remarquez que dans le calcul de la valeur finale l'exposant employé est 4. Cet exposant correspond au nombre de termes dans la suite, ou de manière équivalente au nombre de versements effectués (4), et non à l'exposant du dernier terme de cette suite.*

Reprenons maintenant notre exemple plus complexe de la section précédente. Vous vous demandez combien d'argent vous allez accumuler au bout de 4 ans en plaçant chaque fin de mois 450fr. Le taux est de 3,25% capitalisé par semestre. Vous disposez d'un taux annuel nominal alors que vos versements sont mensuels, il vous faut donc obtenir un taux périodique équivalent.

$$r_p = \left(1 + \frac{0{,}0325}{2}\right)^{1/6} - 1 = 0{,}00269,$$

en divisant le taux nominal par 2 on obtient le taux périodique semestriel, et en prenant la racine sixième on obtient le taux périodique mensuel.

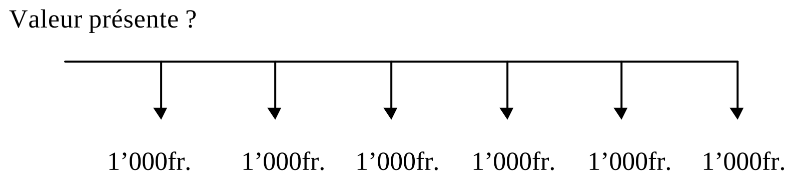
$$V_F = 450\left[\frac{(1{,}00269)^{48} - 1}{0{,}00269}\right] = 23'023{,}51\,fr.$$

L'exposant employé est 48 car vous allez effectuer 12x4=48 versements en 4 ans.

b- Valeur présente de suites de versement de fin de période.

Imaginons maintenant que vous souhaitiez savoir quelle est la valeur aujourd'hui d'un actif financier qui vous rapporte mensuellement 1'000.-fr. par mois durant 6 mois, sachant qu'un taux d'actualisation de 4% effectif annuel vous semble pertinent.

Nous sommes confrontés à la situation suivante :



Bien sûr comme la périodicité est mensuelle, il nous faut un taux périodique mensuel :

$$r_p = (1+r)^{1/k} - 1 = (1{,}04)^{1/12} - 1 = 0{,}0033$$

$$V_p = \frac{1'000}{1{,}0033} + \frac{1'000}{(1{,}0033)^2} + \frac{1'000}{(1{,}0033)^3} + \frac{1'000}{(1{,}0033)^4} + \frac{1'000}{(1{,}0033)^5} + \frac{1'000}{(1{,}0033)^6}$$

, ou encore

$$V_p = \frac{1'000}{1{,}0033}\left[1 + \frac{1}{(1{,}0033)} + \frac{1}{(1{,}0033)^2} + \frac{1}{(1{,}0033)^3} + \frac{1}{(1{,}0033)^4} + \frac{1}{(1{,}0033)^5}\right]$$

et l'on retrouve la somme des 6 premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{(1{,}0033)}$. *Nous pouvons donc appliquer les formules vues précédemment :*

$$V_p = \frac{1'000}{1{,}0033}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{1{,}0033}\right)^6}{1-\left(\frac{1}{1{,}0033}\right)}\right] = \frac{1'000}{1{,}0033}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{1{,}0033}\right)^6}{\left(\frac{1{,}0033-1}{1{,}0033}\right)}\right] = 1'000\left[\frac{1-\left(\frac{1}{1{,}0033}\right)^6}{0{,}0033}\right] = 5931{,}31\,fr.$$

De manière générale, on peut obtenir la formulation suivante :

$$V_p = \frac{X}{1+r}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)}\right] = \frac{X}{1+r}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^n}{\left(\frac{1+r-1}{1+r}\right)}\right] = X\left[\frac{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^n}{r}\right] = X\left[\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right]$$

Valeur présente d'une suite de n versements tardifs X au taux d'intérêt r :

$$\boxed{X\left[\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right]}$$

<u>Exemple</u> :

Vous achetez une automobile en effectuant un versement de 2'500.-fr. à la livraison (aujourd'hui) et en versant la somme de 495.-fr. chaque fin de mois durant 36 mois. Sachant qu'on vous indique que vous bénéficiez d'un crédit au taux nominal annuel de 5,5% capitalisé par semestre, quelle est la valeur totale présente de votre voiture ?

Calcul du taux périodique mensuel :

$$r_p = \left(1+\frac{0{,}055}{2}\right)^{1/6} - 1 = 0{,}00453$$

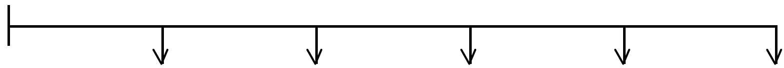
$$V_p = 2'500 + 495\left[\frac{1-(1{,}00453)^{-36}}{0{,}00453}\right] = 18'908{,}63\,fr.$$

Vous pourriez donc acheter aujourd'hui votre automobile en versant la somme totale de 18'908,63fr.

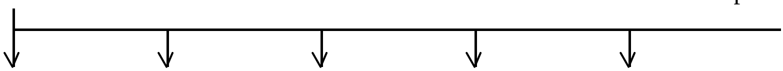
3.2.2 Versements de début de période.

Comment nos calculs sont-ils modifiés si les versements sont effectués non pas en fin, mais en début de période ?

Fin de période



Début de période



Le nombre de versements est identique, c'est leur répartition dans le temps qui change.

■ *Valeur future :*

Par rapport à des versements tardifs, tous les termes de la suite sont multipliés par (1+r) car ils sont placés durant une période de plus. Dès lors, logiquement, notre formule devient :

$$\boxed{V_F = X\left[\frac{(1+r)^n - 1}{r}\right](1+r)}$$

■ *Valeur présente :*

Par rapport à des versements tardifs, tous les termes de la suite sont aussi multipliés par (1+r), car ils sont tous plus proches du point d'origine d'une période (le premier terme sera X, et non $\frac{X}{1+r}$*). Là encore notre formule devient donc :*

$$\boxed{V_p = X\left[\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right](1+r)}$$

<u>*Exercice de compréhension*</u> : ***démontrer arithmétiquement plutôt qu'intuitivement les formules ci-dessus en partant de la forme générale de la somme des premiers termes d'une suite géométrique.***

<u>RECAPITULATION</u> *:*

Suite de versements de fin de période :

$$V_F = X\left[\frac{(1+r)^n - 1}{r}\right]$$

$$V_p = X\left[\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right]$$

Suite de versements de début de période :

$$V_F = X\left[\frac{(1+r)^n - 1}{r}\right](1+r)$$

$$V_p = X\left[\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right](1+r)$$

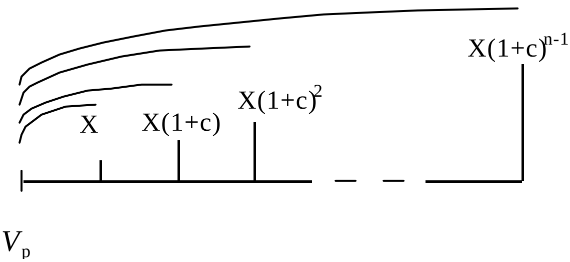
3.3 *Périodicités croissantes et décroissantes.*

Jusqu'à présent nous avons seulement considéré des suites de versements égaux (on place ou on rembourse le même montant à chaque période). Cependant, ces versements peuvent évoluer en réalité. Comment cela va-t-il affecter nos calculs ?

3.3.1 *Croissance ou décroissance régulière.*

Nous allons maintenant supposer que les montants considérés évoluent de manière régulière, c'est à dire qu'ils croissent ou décroissent d'une période à l'autre au même taux (selon le même rythme).

■ *Valeur présente d'une suite de versements tardifs croissant au taux c.*



Que valent tous ces versements aujourd'hui ? Il suffit pour le savoir d'appliquer les formules de la même manière que précédemment :

$$V_p = \frac{X}{1+r} + \frac{X(1+c)}{(1+r)^2} + \frac{X(1+c)^2}{(1+r)^3} + \ldots + \frac{X(1+c)^{n-1}}{(1+r)^n}$$

$$V_p = \frac{X}{1+r}\left[1 + \frac{1+c}{1+r} + \left(\frac{1+c}{1+r}\right)^2 + \left(\frac{1+c}{1+r}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1+c}{1+r}\right)^{n-1}\right]$$

on retrouve bien une suite géométrique comprenant n termes, et dont la raison est : $\frac{1+c}{1+r}$*. On peut donc aisément simplifier l'expression précédente.*

$$V_p = \frac{X}{1+r}\left[\frac{1-\left(\frac{1+c}{1+r}\right)^n}{1-\frac{1+c}{1+r}}\right] = \frac{X}{1+r}\left[\frac{1-\left(\frac{1+c}{1+r}\right)^n}{\frac{1+r-1-c}{1+r}}\right] = \frac{X}{1+r}\left[\frac{1-\left(\frac{1+c}{1+r}\right)^n}{\frac{r-c}{1+r}}\right]$$

ce qui donne finalement : $\boxed{V_p = X\left[\frac{1-\left(\frac{1+c}{1+r}\right)^n}{r-c}\right]}$

Le taux c peut être positif (versements croissants au fil du temps), ou encore négatif (versements décroissants). Si c < -r, alors la valeur présente de chaque versement sera inférieure à celle du versement précédent.

<u>Exemple</u> :

Vous avez contracté un emprunt de 120'000fr., mais vous avez décidé que vos remboursements annuels de fin de période seraient croissants car vous anticipez une évolution identique de votre salaire. Quelle sera la première annuité à verser si le taux d'actualisation pertinent pour ces versements est de 6,5% annuel effectif, que vous souhaitez une croissance des versements (c) de 5% chaque année et que l'échéance du prêt est de 15 ans ?

<u>Solution</u> :

$$120'000 = X\left[\frac{1-\left(\frac{1,05}{1,065}\right)^{15}}{0,065-0,05}\right]$$ *donc :* $X = 9'391,75 fr.$

■ *Valeur présente d'une suite précoce de versements croissants au taux c.*

Il est grand temps pour vous de vous entraîner à manipuler les suites géométriques, c'est pourquoi nous vous laissons le soin de prouver vous même que la valeur présente d'une suite de versements de début de période est égale à :

$$V_p = X(1+r)\left[\frac{1-\left(\frac{1+c}{1+r}\right)^n}{r-c}\right]$$

Exemple :

Vous versez au début de chaque mois un loyer pour votre 2 1/2 fribourgeois. Vous anticipez demeurer dans ce logement durant 7 ans (fin de votre licence, puis doctorat à l'Université de Fribourg). Sachant que vous prévoyez une augmentation annuelle de votre loyer de 2,5% et que vous actualisez vos flux au taux de 4,5% annuel effectif, quelle est la valeur présente de tous vos paiements de loyer ? Votre loyer actuel est de 1'200fr.

Solution :

Elle procède en deux étapes , la détermination des loyers annuels, puis la prise en considération du taux de croissance annuel de ces loyers. Taux d'actualisation périodique mensuel :

$$r_p = \sqrt[12]{(1+0{,}045)} - 1 = 0{,}00367$$

$$1'200(1{,}00367)\left[\frac{1-(1{,}00367)^{-12}}{0{,}00367}\right] = 14'578{,}38\ fr.$$

ce qui nous indique la valeur présente des 12 premiers versements de loyer. Il s'agit là de versements de début de période. Calculons maintenant la valeur actuelle de 7 années de tels versements, sachant qu'ils augmenteront de 2,5% chaque année.

$$14'578{,}38(1{,}045)\left[\frac{1-\left(\frac{1{,}025}{1{,}045}\right)^{7}}{0{,}045-0{,}025}\right]=96'372{,}77 \text{ fr.}$$

Valeur présente de l'ensemble des loyers versés au cours des sept années.

■ *Valeur future de périodicités tardives ou précoces croissant régulièrement*

Après avoir vu les valeurs présentes, passons aux valeurs futures, c'est-à-dire aux montants accumulés à l'échéance de placements ou rentes qui évoluent de manière régulière dans le temps.

Supposons toujours une série de n flux financiers tardifs évoluant au taux c de manière régulière (c pouvant être positif ou négatif). Le premier versement, en fin de la période 1, est X. Quelle est la valeur finale de cette série de versements ?

$$V_F = X(1+r)^{n-1} + X(1+r)^{n-2}(1+c) + X(1+r)^{n-3}(1+c)^2 + \ldots + X(1+r)(1+c)^{n-2} + X(1+c)^{n-1}$$

$$V_F = X(1+r)^{n-1}\left[1+\frac{1+c}{1+r}+\left(\frac{1+c}{1+r}\right)^2+\left(\frac{1+c}{1+r}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1+c}{1+r}\right)^{n-1}\right]$$ *et nous retrouvons une expression désormais familière : suite géométrique de n termes de raison* $\frac{1+c}{1+r}$*.*

$$V_F = X(1+r)^{n-1}\left[\frac{1-\left(\frac{1+c}{1+r}\right)^n}{1-\frac{1+c}{1+r}}\right] = X(1+r)^{n-1}\left[\frac{1-\left(\frac{1+c}{1+r}\right)^n}{\frac{1+r-1-c}{1+r}}\right] = X(1+r)^n\left[\frac{1-\left(\frac{1+c}{1+r}\right)^n}{r-c}\right]$$

Donc notre formule finale pour une suite de flux de fin de période est :

$$\boxed{V_F = X(1+r)^n\left[\frac{1-\left(\frac{1+c}{1+r}\right)^n}{r-c}\right]}$$

Pour ce qui est des suites de flux précoces évoluant régulièrement à un taux c, nous vous laissons le soin de démontrer que leur valeur future est égale à :

$$\boxed{V_F = X(1+r)^{n+1}\left[\frac{1-\left(\frac{1+c}{1+r}\right)^n}{r-c}\right]}$$

Illustrons ces deux dernières formules.

<u>Exemple</u> :

Vous êtes l'heureux parent d'un enfant de 2 ans, et vous souhaitez préparer son avenir en assurant qu'il dispose de fonds *suffisants pour financer ses études supérieures. Vous voulez donc placer une somme donnée X en fin de chaque trimestre afin d'accumuler pour les 18 ans de votre enfant 200'000fr. Cette somme X serait croissante au taux de 1,5% par trimestre. Par ailleurs, vous jugez qu'un taux d'actualisation de 4,5% annuel effectif est pertinent. On cherche donc le montant X du premier versement.*

<u>Solution</u> :
Taux périodique trimestriel :

$$r_p = (1{,}045)^{1/4} - 1 = 0{,}01106$$

Calcul de X :

$$200'000 = X(1{,}01106)^{64}\left[\frac{1-\left(\frac{1{,}015}{1{,}01106}\right)^{64}}{0{,}01106-0{,}015}\right]$$

donc $X = \frac{200'000}{145{,}03} = 1'379{,}03\,fr.$

1'379,03fr représente donc la somme que vous devrez déposer chaque trimestre pour assurer les études futures de votre enfant.

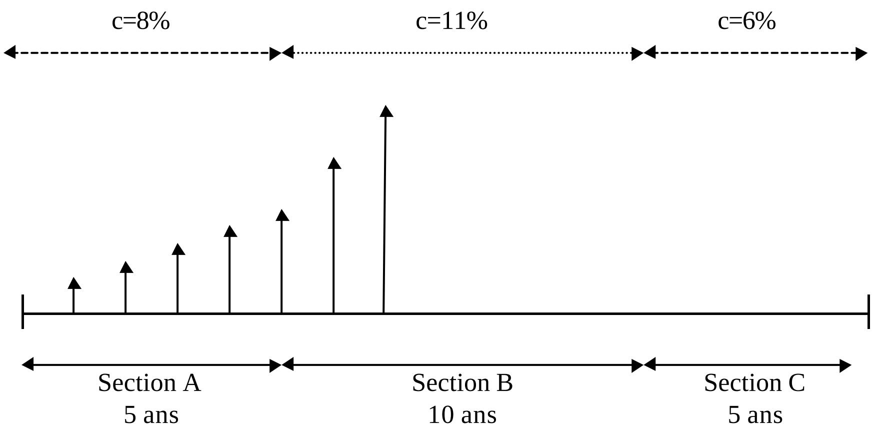
3.3.2 *Croissance ou décroissance irrégulière des suites :*

Toutes les suites ne sont pas aussi régulières que nous l'avons vu jusqu'à présent. Les prêts hypothécaires sont renégociés à fréquence régulière notamment. Il est donc important de savoir comment intégrer dans nos calculs diverses tendances des flux financiers dans le temps : c'est ce que nous allons faire en introduisant différents taux d'évolution des suites sur l'horizon.

■ *Différents taux de croissance :*

Nous allons toujours utiliser le même principe de sommation des termes d'une suite, mais en dissociant certains segments. Prenons l'exemple d'une suite de versements annuels tardifs croissant au taux de 8% durant 5 ans, puis au taux de 11% pendant 10 ans, et finalement au taux de 6% durant 5 autres années. Une telle situation peut correspondre à une planification de versements de cotisations de retraite en fonction des circonstances familiales : arrivée d'un enfant, achat immobilier, ...

Supposons le premier versement de 2'500fr. et le taux d'intérêt requis de 5,5%.



<u>Section A</u> : valeur finale après 20 ans.
Valeur finale après 5 ans :

$$V_{F5} = 2500(1,055)^5 \left[\frac{1 - \left(\frac{1,08}{1,055} \right)^5}{0,05 - 0,08} \right] = 13'530,67 \text{ fr.}$$

Valeur finale après 20 ans :

$$V_{F20} = 2'500(1{,}055)^5 \left[\frac{1 - \left(\frac{1{,}08}{1{,}055} \right)^5}{0{,}05 - 0{,}08} \right] (1{,}055)^{15} = 30'206{,}91\, fr.$$

<u>Section B</u> : valeur finale dans 20 ans.
Valeur finale après 10 ans :

$$V_{F\,15} = 2'500(1{,}08)^4(1{,}11)(1{,}055)^{10} \left[\frac{1 - \left(\frac{1{,}11}{1{,}055} \right)^{10}}{0{,}05 - 0{,}11} \right] = 77'654{,}05\, fr.$$

Valeur finale après 15 ans :

$$V_{F\,20} = 77'654{,}05(1{,}055)^5 = 101'490{,}73\, fr.$$

<u>Section C</u> : valeur finale dans 20 ans.
Valeur finale :

$$V_{F20} = 2'500(1{,}08)^4(1{,}11)^{10}(1{,}06)(1{,}055)^5 \left[\frac{1 - \left(\frac{1{,}06}{1{,}055} \right)^5}{0{,}055 - 0{,}06} \right] = 64'012{,}83\, fr.$$

***Au total** nous avons :*
36'248,29+101'490,73+64'012,83 =201'751,85fr.

■ *Différents taux d'intérêt*

Il est évident que sur votre horizon de planification, qu'il s'agisse de planifier une retraite ou un remboursement de prêt, les taux d'intérêt une plus qu'une large chance de varier. Nous allons maintenant aborder cette éventualité à travers un exemple.

Supposons que vous cherchiez à savoir combien vous pouvez accumuler en 20 ans si vous effectuez des dépôts tardifs mensuels de 300fr. alors que vous anticipez les taux d'intérêt suivants :

- durant les 3 premières années : 5% annuel à capitalisation mensuelle

- durant les 8 années suivantes : 4% annuel effectif

- durant les 9 dernières années : 3,5% à capitalisation semestrielle.

De même que précédemment, nous avons 3 sections différentes

<u>Section A</u> : Valeur finale après 20 ans

Calcul du taux périodique pertinent : $r_p = \left(\frac{0{,}05}{12}\right) = 0{,}0041$

Valeur finale après 3 ans : $V_{F3} = 300\left[\frac{(1{,}0041)^{12*3} - 1}{0{,}0041}\right] = 11'612{,}16\,fr.$

Valeur finale après 20 ans :

$$V_{F20} = 300\left[\frac{(1{,}0041)^{12*3} - 1}{0{,}0041}\right](1{,}04)^8(1{,}03536)^9 = 21'727{,}12\,fr.$$

<u>Section B</u> :

Calcul du taux périodique pertinent : $r_p = (1{,}04)^{1/12} - 1 = 0{,}00327$

Valeur finale après 8 ans :

$$V_{F11} = 300\left[\frac{(1{,}00327)^{12*8} - 1}{0{,}00327}\right] = 40'897{,}71\,fr.$$

Valeur finale après 17 ans :

$$V_{F11} = 300\left[\frac{(1{,}00327)^{12*8} - 1}{0{,}00327}\right](1{,}003536)^9 = 55'914{,}11\,fr.$$

<u>Section C</u> :

Calcul du taux périodique pertinent :

$$r_p = \left(1 + \frac{0{,}035}{2}\right)^{1/6} - 1 = 0{,}0029$$

Valeur finale après 9 ans :

$$V_{F20} = 300\left[\frac{(1{,}0029)^{12*9} - 1}{0{,}0029}\right] = 37'983{,}64\,fr.$$

Au total *la somme accumulée est donc : 21'727,12 + 55'914,11 + 37'983,64 =115'983,64fr.*

Nous vous laissons le soin d'aborder vous mêmes le cas (fort réaliste) où à la fois les taux d'intérêt et les taux d'évolution des périodicités varient dans le temps.

3.4 Les suites de versements perpétuels

Cette section peut surprendre le lecteur, car dans la pratique, peu de versements se poursuivent indéfiniment. Rappelons pour exemple que les actions, titres sans échéance, versent régulièrement des dividendes. Par ailleurs, certaines obligations, dites "perpétuelles" versent des coupons (c'est-à-dire l'intérêt sur le capital investi) durant 99 ans, ce qui mathématiquement parlant est souvent assimilable à des versements infinis.

Examiner les suites perpétuelles est aussi utile car, comme nous allons le voir, cela permet d'effectuer rapidement des approximations car les calculs sont grandement simplifiés par rapport au cas standard de suites de versements limités dans le temps.

3.4.1 les perpétuités constantes

Examinons d'abord une suite de versements constants d'une somme X indéfiniment. Dans le cas de suites finies, nous savons quelles formules de calcul s'appliquent :

$$V_F = X\left[\frac{(1+r)^n - 1}{r}\right]$$

$$V_p = X\left[\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right]$$

Il nous suffit donc de trouver la limite de ces expressions lorsque n devient infiniment grand.

$$\boxed{\lim_{n \longrightarrow \infty} X\left[\frac{(1+r)^n - 1}{r}\right] = \infty}$$

La valeur future d'une infinité de versements est logiquement égale à l'infini.

$$\boxed{\lim_{n \longrightarrow \infty} X\left[\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right] = X\left[\frac{1-0}{r}\right] = \frac{X}{r}}$$

Dans le cas où r est supérieur à zéro, la valeur présente d'une infinité de versements constants X est simplement égale au versement X divisé par le taux d'actualisation r. Cette formule est nettement la plus simple de toutes celles qui permettent de calculer des valeurs présentes, c'est pourquoi on l'utilise pour effectuer des approximations rapides (voir section 4 pour des exemples, notamment dans le cas des obligations émises à long terme).

<u>Exemple</u> :

Vous avez le choix entre recevoir aujourd'hui la somme de 355'000.-fr. ou obtenir une rente mensuelle de 1'500.-fr à perpétuité. Quelle sera votre décision si selon vous le taux pertinent d'actualisation est de 5,8% nominal annuel capitalisé par mois.

<u>Solution</u> :

Il nous faut tout d'abord calculer un taux d'intérêt qui soit conforme à la fréquence de versement, c'est-à-dire ici un taux périodique mensuel.

$$r_p = \frac{r_i}{k} = \frac{0{,}058}{12} = 0{,}0048$$

Ensuite on calcule la valeur présente des versements :

$$V_p = \frac{1'500}{0{,}0048} = 312'500.-fr.$$

Ainsi, on préférera la somme globale de 355'000.-fr. à la suite de versements perpétuels.

3.4.2 Les perpétuités non constantes

Examinons maintenant le cas où les versements perpétuels évoluent de façon régulière dans le temps.

De même que précédemment, partons du cas standard de versements périodiques évoluant au taux constant par période c ; la valeur présente de ces versements est de :

$$V_p = X\left[\frac{1-\left(\frac{1+c}{1+r}\right)^n}{r-c}\right]$$

Considérons maintenant la limite de cette expression lorsque le nombre de versements n tend vers l'infini.

$$\boxed{\lim_{n \longrightarrow \infty} X\left[\frac{1-\left(\frac{1+c}{1+r}\right)^n}{r-c}\right] = X\left[\frac{1-0}{r-c}\right] = \frac{X}{r-c}} \qquad \text{lorsque } c < r$$

Si c est supérieur à r, c'est à dire, si le taux de croissance des versements vient plus que compenser les effets de l'actualisation, alors la valeur présente de la suite de versements est infinie.

Exemple :

EXERCICES -- SECTION 3

EXERCICES -- SECTION 4

CONCLUSION :

Dans ce chapitre vous ont été présentés tous les outils de base des mathématiques financières. A l'aide de ceux-ci vous êtes maintenant capable d'aborder de manière autonome les divers calculs liés aux emprunts et placements. Mais vous êtes aussi préparés à l'évaluation d'actifs financiers, comme vous allez pouvoir le constater dans le chapitre suivant. En maîtrisant les principes et mécanismes de l'actualisation, vous vous ouvrez une large (et incontournable) section de la gestion finance, c'est pourquoi nous vous invitons fortement à exercer les éléments exposés dans ce premier chapitre.